SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

S. GRAFFI

OPERATORI DI SCHRODINGER CON POTENZIALI TEMPORALMENTE PERIODICI

9-16 FEBBRAIO 1984

1. CENNO INTRODUTTIVO, NOTAZIONI

Sia $t \to W(t)$ una funzione C^{∞}, periodica di periodo T, a valori reali. Sia $\vec{e} = (1,0,0) \in R^3$ versore unitario, e $x \to V(x)$ una funzione da R^3 in R. In questo seminario considereremo, per scelte speciali di $W(t)$ che sono però le più significative dal punto di vista fisico, l'equazione di Schrödinger non autonoma

$$(1.1) \qquad (-i\vec{\nabla} - \vec{e}\,W(t))^2\,\psi(x,t) + V(x)\psi(x,t) = i\,\frac{\partial\psi}{\partial t}(x,t)$$

che descrive il moto di una particella di massa $\frac{1}{2}$ e carica 1 che si muove in un campo di forze di potenziale $V(x)$ sotto l'azione ulteriore di un campo elettrico esterno spazialmente omogeneo ma periodico nel tempo con frequenza T^{-1}, diretto lungo $\vec{e}$ e di intensità $\frac{dw(t)}{dt}$. Per la motivazione fisica dei risultati riportati in seguito rinvio ad esempio ai lavori di Yajima [1] e di Graffi-Grecchi-Silverstone [2] oltre che alla bibliografia ivi contenuta. A questo scopo sono utili anche le monografie di Merzbacher [3] e di Bethe [4].

Le notazioni sono le seguenti: $H \equiv L^2(R^3)$: $L^2(T_\omega)$ è lo spazio di Hilbert delle funzioni periodiche di periodo $\frac{2\pi}{\omega}$, T_ω il toro $R/(2\pi/\omega)$; $K \equiv H \otimes L^2(T_\omega)$, $H^2 \equiv H^2(R^3)$. Al solito, $D(A)$, $R(A)$, $W(A)$, $\|\cdot\|_A$ indicano dominio, range, range numerico, norma del grafico di un operatore lineare A in uno spazio di Hilbert X. Indicherò poi, dato $a > 0$, con $\mathbb{C}_a$ la striscia complessa $\{z : z \in \mathbb{C} : (\mathrm{Im}\,z) < a\}$, e con $\mathbb{C}_a^{\pm} = \{z : z \in \mathbb{C}_a : \mathrm{Im}\,z \gtrless 0\}$.

L'unica ipotesi fondamentale sul potenziale $x \to V(x)$ è che esso sia analitico per dilatazione, e cioè:

A.1. $V(x) \in C_\alpha$ $\forall$ $\alpha \leqq \frac{\pi}{4}$. C_α è la classe (di Combes) dei potenziali analitici per dilatazione per $|\mathrm{Im}\theta| < \alpha$, cioè di tutte le funzioni $x \to V(x)$ tali che la funzione $(x,\theta) \to V(e^\theta x)$, considerata come operatore massimo di moltiplicazione, rappresenta una famiglia olomorfa di tipo A nel senso di Kato [5 , Cap. VIII] di operatori compatti da H^2 in H per $\theta \in \mathbb{C}_\alpha$.

Osservazione. Il potenziale Coulombiano $x \to -|x|^{-1} = V(x)$ è in C_α $\forall$ $\alpha > 0$: infatti $V(e^\theta x) = -e^{-\theta}|x|^{-1}$.

2. L'OPERATORE DI FLOQUET. QUESTIONI ESISTENZIALI

Il ben noto formalismo di Floquet riporta l'equazione non autonoma (1.1) ad una autonoma. Formalmente, infatti, la (1.1) è risolta da $\psi(\cdot,t) = e^{-i\lambda t}\phi(\cdot,t)$, $\phi(\cdot,t) \in C^1(T_\omega, H^2)$, per esempio, se e solo se λ è autovalore dell'operatore

$$(2.1) \qquad K = (-i\vec{\nabla} - \vec{e}\, W(t))^2 + V - i\frac{\partial}{\partial t}$$

corrispondente all'autovettore $\phi(\cdot,t)$, dove K agisce sullo spazio $K = H \otimes L^2(T_\omega)$. K si dice Hamiltoniana di Floquet o, con abuso di linguaggio, operatore di Floquet. Poiché questo formulismo verrà usato pesantemente in quel che segue, è utile descriverne la costruzione, il cui primo elemento è rappresentato da un teorema di esistenza e unicità per la equazione di Schrödinger (1.1). A sua volta questo risultato segue da un teorema astratto di Kato, che per i nostri scopi è sufficiente riportare (senza dimostrazione) nell'enunciato che ne danno Reed e Simon ([6], Teorema X.70).

2.1. Teorema. (Kato). Sia X un Banach e $I \subset R_+$ un intervallo aperto. Sia $t \to A(t) \in L(X)$ generatore di un semigruppo di contrazione $\forall t \in I$, e inoltre:

1) $t \to A(t)$ ha dominio costante D $\forall t \in I$ (e pertanto $A(t)\, A(s)^{-1} \in B(X)$ $\forall (t,s) \in I$).
2) Sia $C(t,s) = A(t)A(s)^{-1} - I$. Allora $(t,s) \to (t-s)^{-1}\, C(t,s)u$ è uniformemente fortemente continua e uniformemente limitata in (s,t), $s \neq t$, $\forall (s,t) \in I_1$, $\forall u \in X$, $I_1 \subset I$ intervallo compatto.
3) $\lim_{s \uparrow t} (t-s)^{-1}\, C(t,s)\, u \equiv C(t)u$ esiste $\forall u \in X$, uniformemente rispetto a $t \in I_1$; $t \to C(t) \in B(X)$ ed è fortemente continua in t $\forall t \in I_1$. Allora esiste $(t,s) \to U(t,s) \in B(X)$, $(t,s) \in I_1$ (detto propagatore) tale che

(a) $U(r,s)\, U(s,t) = U(r,t)$, $r \leqq s \leqq t$

(b) $U(t,t) = I$

(c) $U(t,s)$ è uniformemente fortemente continuo $\forall (t,s) \in I_1$.

(d) $\psi \in D \Rightarrow \phi_s(t) = U(t,s)\, \psi \in D$ $\forall t \in I$ e

(2.2)
$$\frac{d}{dt}\, \phi_s(t) = -A(t)\, \phi_s(t) \quad , \quad \phi_s(s) = \psi$$

con $\|\phi_s(t)\| \leq \|\psi\|$, $\forall t \geqq s$.

(e) Se X è un Hilbert, e $A = A^*$, $\{U(t,s) : (t,s) \in R\}$ è unitario.

Osservazione. L'ipotesi che $t \to A(t)$ generi un semigruppo di contrazione può essere banalmente indebolita a che $t \to A(t)$ generi un semigruppo C_0 unif.su t; basta infatti aggiungere una costante indipendente da t.

Vogliamo ora verificare che la (1.1) rientra nelle ipotesi di 2.1. A questo scopo assumiamo fin d'ora:

(2.3) $$W(t) = \frac{F}{\omega} \sin \omega t \; , \quad F > 0, \; \omega > 0 \; ,$$

indichiamo con $H(F,\theta,t)$ la famiglia di operatori in H definita dall'azione di $(-i\, e^{-\theta} \vec{\nabla} + \vec{e} \frac{F}{\omega} \sin \omega t)^2 + V(e^{\theta} x)$ su $D(H(F,\theta,t)) = H^2$, e dimostriamo il seguente

2.2. Lemma. Siano $\theta \in ¢_a$, $a < \frac{\pi}{4}$, $t \in T_\omega$, $F \in ¢$. Allora:

1) La famiglia di operatori $(F,\theta,t) \to H(F,\theta,t)$ è per ogni fissato t una famiglia olomorfa e autoaggiunta di tipo A in $(F,\theta) \in ¢ \times ¢_a$. Se $\theta \in R$:

(2.4) $$H(F,\theta,t) = S(\theta)\, H(F,t)\, S(\theta)^{-1} \; , \quad H(F,t) = H(F,0,t)$$

dove $(S(\theta)f)(x) = f(e^{\theta} x) \,.\, e^{3\theta/2}$, $f \in H$.

2) $\exists\, 0 < M < \infty$ tale che $\pm\, i\, H(F,\theta,t) + M$ è massimo accretivo, e la funzione $(F,\theta,t) \to (\pm\, iH(F,\theta,t) - z)^{-1} \in B(H)$ è differenziabile in $(F,\theta,t) \in ¢ \times ¢_a^{\pm} \times T_\omega$ se $\mathrm{Re}\, z > M$.

3) $\forall (F,\theta,t) \in ¢ \times \bar{¢}_a^{\pm} \times T_\omega$ $\pm iH(F,\theta,t)$ genera un semigruppo di classe C_0 (notazione di Yosida [7]) $e^{\pm i\sigma H(F,\theta,t)}$ in H, $\|\exp(\pm i\sigma H(F,\theta,t))\| \leq e^{M\sigma}$. Se $\theta \in ¢_a^{\pm}$, $\exp(\pm i\sigma H(F,\theta,t))$ è un semigruppo olomorfo di classe $H(2\, \mathrm{Im}\theta - \delta, \gamma_\delta)$ (notazione di Kato, Cap. 9) $\forall\, \delta > 0$ e per un qualche $\gamma_\delta > 0$.

(4) La funzione $(\sigma,F,\theta,t) \to \exp(\mp i\sigma H(F,\theta,t)) \in B(H)$ è fortemente continua in $(\sigma,F,\theta,t) \in R_+ \cup \{0\} \times R \times \bar{¢}_a^{\pm} \times T_\omega$, ed è analitica in $\theta \in ¢_a^{\pm}$. Per $\phi \in R$, $\theta \in \bar{¢}_a^{\pm}$:

(2.5) $$S(\phi)\, e^{\mp i\sigma H(F,\theta,t)}\, S(\phi)^{-1} = e^{\mp i\sigma H(F,\theta,\phi,t)}$$

Dimostrazione. $\forall u \in H^2$ si ha:

$$H(\cdot)u = -e^{-2\theta}\,\Delta u + 2\,ie^{-\theta}\,W(t)\,\frac{\partial}{\partial x}u + W(t)^2 u + V(e^{\theta}\,x)$$

Ora la moltiplicazione per $W(t)$, vista come operatore in H, è limitata da $\frac{|F|}{\omega}$, e pertanto si vede subito che dato $b > 0$ $\exists\, a > 0$ indipendente da (F,θ,t) tale che

$$\|W(t)\frac{\partial u}{\partial x}\| \leqq b\,\|T(\theta)u\| + a\,\|u\| \tag{2.6}$$

dove $T(\theta)$ è l'azione di $-e^{-2\theta}\,\Delta + V(\theta)$ Su H^2. Ora $T(\theta)$ è notoriamente una famiglia olomorfa autoaggiunta di tipo A date le nostre ipotesi su V (vedasi ad es. Reed-Simon, XIII.10). Pertanto per (2.6) $H(F,\theta,t)$ è chiuso, ha insieme risolvente non vuoto perché $\rho(T(\theta)) \neq \emptyset$ e poiché la funzione $(F,\theta,t) \to H(F,\theta,t)u$ a valori in H è intera $\forall\,(F,\theta) \in \mathbb{C}$, $t \in T_\omega$ fissato, $H(F,\theta,t)$ è una famiglia olomorfa di tipo A per definizione. E' inoltre ovvio che $H(F,\theta,t)^* = H(\bar{F},\bar{\theta},t)$, e $H(F,\theta,t) = S(\theta)H(F,t)S(\theta)^{-1}$. Anche l'osservazione (2) è una conseguenza semplice della maggiorazione uniforme (2.6). Consideriamo, per (3) e (4), il solo caso + perché il caso - segue per simmetria. Se $\theta \in \mathbb{C}_a^{-+}$, $H(F,\theta,t)$ genera un semigruppo C_0 per (2) e Kato [8], IX.1.18. Per $\theta \in \mathbb{C}_a^+$ i $T_0(\theta) = -i\,e^{-2\theta}\,\Delta$ genera un semigruppo olomorfo di classe $H(2\mathrm{Im}\theta,0)$ (Kato, Teorema IX.1.24). Poiché $V(\theta)$ è, per A.1, limitato rispetto a $T_0(\theta)$ con sup relativo 0, e lo stesso vale per $W(t)\cdot\frac{\partial}{\partial x}$ perché (2.6) ovviamente vale con $T_0(\theta)$ al posto di $T(\theta)$, l'asserzione (3) segue da (Kato [8], Cor. IX.2.5.), e la (4) si prova esattamente come in Yajima [1], Lemma 2.3 (3).

La verifica delle condizioni del teorema 2.1 da parte di $H(F,\theta,t) + M$ è ora immediata. Pertanto possiamo senz'altro stabilire la seguente

2.3. Proposizione. Sia $\theta \in \bar{\mathbb{C}}_a^{\pm}$ e $F \in R$. L'equazione di Schrödinger (1.1), riscritta come:

$$H(F,\theta,t)\,\psi = i\,\frac{\partial\psi}{\partial t} \tag{2.7}$$

genera un unico propagatore $U(t,s;F,\theta)$ tale che:

(1) $U(s,s;F,\theta) = I$; $U(t,r;F,\theta)U(r,s;F,\theta)=(U(t,s;F,\theta)$, $\pm t \geq \pm r \geq \pm s$.

(2) $U(t,s;F,\theta)H^2 \subset H^2$; $U(t,s;F,\theta)$ è derivabile in (t,s) $\forall f \in H^2$ e:

$$i\,\frac{\partial}{\partial t}\,(U(t,s;F,\theta))f = H(F,\theta,t)f \tag{2.8}$$

$$-i\,\frac{\partial}{\partial s}\,(t,s;F,\theta)f = H(F,\theta,s)f \tag{2.9}$$

$$\|U(t,s;F,\theta)\| \leq e^{M|t-s|} \tag{2.10}$$

(3) $U(t+2\pi/\omega,\ s+2\pi/\omega,\ F,\theta) = U(t,s,F,\theta)$

(4) Se $\phi \in R$, $U(t,s;F,\theta+\phi) = S(\phi)U(t,s;F,\theta)S(\phi)^{-1}$

(5) $U(t,s;F,\theta)$ è fortemente continuo in $(t,s;F,\theta)$ per $\pm t \geq \pm s$, $\theta \in \bar{\mathbb{C}}_a^{\pm}$, ed è analitico in $\theta \in \mathbb{C}_a^{\pm}$ per ogni fissato $(t,s;F)$

(6) Se $(\theta,F) \in R$, $\{U(t,s;F,\theta):(t,s) \in R\}$ è unitario.

Per $F \in R$, $\theta \in \bar{\mathbb{C}}_a^{\pm}$, definiamo ora una famiglia ad un parametro di operatori in K, $\{\mathcal{U}(\pm\sigma;F,\theta):\sigma \geq 0\}$:

$$(\mathcal{U}(\pm\sigma;F,\theta))f(\cdot,t) = U(t,t-\sigma,F,\theta)f(\cdot,t-\sigma), \quad f \in K \tag{2.11}$$

Vedremo che $\{\mathcal{U}(\pm\sigma,\cdot):\ \sigma \geq 0\}$ è il semigruppo di classe C_0 generato dallo operatore di Floquet. Intanto:

<u>2.4. Proposizione</u>. Sia $\mathcal{D} = C^1(T_\omega, \mathcal{H}) \cap C(T_\omega, H^2) \subset \mathcal{K}$. Per $F \in \mathbb{C}$, $\theta \in \mathbb{C}_a$, $u \in \mathcal{D}$ poniamo:

$$\dot{K}(F,\theta)\, u = H(F,\theta,t)u - i \frac{\partial}{\partial t} u \tag{2.12}$$

(1) Se $(F,\theta) \in R$, $\dot{K}(F,\theta)$ ha chiusura autoaggiunta $K(F,\theta)$, e

$$K(F,\theta) = \hat{S}(\theta)K(F)\,\hat{S}(\theta)^{-1},\ K(F) = K(F,0),\ \hat{S}(\theta) = S(\theta) \otimes I \tag{2.13}$$

(2) Per $\theta \in \mathbb{C}_a^{\pm}$ $K(F,\theta)$ ha dominio $L^2(T_\omega) \otimes H^2 \cap H^1(T_\omega) \otimes \mathcal{H}$ e rappresenta una coppia di famiglie olomorfe di tipo A in $(F,\theta) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}_a^{\pm}$. Inoltre $\exists\, M > 0$ indipendente da (F,θ) nei compatti di $\mathbb{C} \times \mathbb{C}_a^{\pm}$ tale che $\pm iK(F,\theta) + M$ è massimo accretivo. Per $\phi \in R$:

$$\hat{S}(\phi)K(F,\theta)\,\hat{S}(\phi)^{-1} = K(F,\theta + \phi) \tag{2.14}$$

(3) $K(F,\theta)$ è fortemente continuo in senso generalizzato per $\mathrm{Im}\theta \downarrow\uparrow 0$, uniformemente rispetto a (F,z) nei compatti di $\mathbb{C} \times \{z \in \mathbb{C} : \pm \mathrm{Im} z > M\}$.

(4) Se $\lambda \in \sigma_d(K(F,\theta))$, $\theta \in \bar{\mathbb{C}}_a^{\pm}$, λ è localmente indipendente da θ. Se $F \in R$, $\mathrm{Im}\lambda \leq 0$ per $\theta \in \bar{\mathbb{C}}_a^{+}$, $\mathrm{Im}\,\lambda \geq 0$ se $\theta \in \bar{\mathbb{C}}_a^{-}$.

<u>Dimostrazione</u>. (1) Siano $(F,\theta) \in R$. Per 2.3 (6), la famiglia di operatori in $\mathcal{K}$ definita da (2.11) per $\sigma \in R$, cioè $(\mathcal{U}(\sigma;F,\theta)f)(\cdot,t) = U(t,t-\sigma;F,\theta)f(\cdot,t-\sigma)$, $f \in \mathcal{K}$, è un gruppo unitario. Pertanto per il teorema di Stone $\{\mathcal{U}(\sigma;F,\theta) : \sigma \in R\}$ è generato da un operatore autoaggiunto $L(F,\theta)$ in $\mathcal{K}$:

$$\mathcal{U}(\sigma;F,\theta) = e^{-i\sigma L(F,\theta)} \tag{2.15}$$

Per 2.3 (2), $\mathcal{D}$ è invariante rispetto a $\{\mathcal{U}(\sigma;F,\theta)\}$ e pertanto (Reed-Simon, Teor. VIII.10) $\mathcal{D}$ è un core di Kato per il generatore $L(F,\theta)$. D'altra parte per (2.9) si ha chiaramente, se $f \in \mathcal{D}$:

$$i \frac{d}{d\sigma} \mathcal{U}(\sigma;F,\theta)f\big|_{\sigma=0} = \dot{K}(F,\theta)f \tag{2.16}$$

Quindi $L(F,\theta) \restriction \mathcal{D} = \dot{K}(F,\theta)$. Poiché $\dot{K}(F,\theta)$ è ovviamente simmetrico, e $\mathcal{D}$ è un core per l'autoaggiunto $L(F,\theta)$, $\dot{K}(F,\theta)$ è essenzialmente autoaggiunto e $K(F,\theta) = L(F,\theta)$. (2) Consideriamo solo il caso +. Notiamo che $K(0,\theta) \equiv K(\theta)$ definito come l'azione di $T(\theta) - i \frac{\partial}{\partial t}$ su $L^2(T_\omega) \otimes H^2 \cap H^1(T_\omega) \otimes H$ è ovviamente una famiglia olomorfa di tipo A per $\theta \in \mathbb{C}_a^+$.
Per lo stesso ragionamento del Lemma 2.2, $K(F,\theta)$ sarà una famiglia olomorfa di tipo A se $\forall b > 0 \;\; \exists\, a > 0$ indipendente da θ nei compatti di $\mathbb{C}_a^+$ tale che:

$$\|\omega^{-1} \sin \omega t(- i \frac{\partial}{\partial x})u\| \le |\omega^{-1}| \; \|- i \frac{\partial}{\partial x} u\| \le b\|K(\theta)u\| + a\|u\| \tag{2.17}$$

$\forall u \in D(K(\theta))$. Poiché $\mathrm{Im}\theta > 0$, un calcolo elementare dà:

$$\lim_{\mathrm{Im}\, z \to +\infty} \sup_{n \in Z} \| - i \frac{\partial}{\partial x} \cdot (T_0(\theta) + n\omega - z)^{-1} \|_H = \tag{2.18}$$

$$= \lim_{\mathrm{Im}\, z \to +\infty} \sup_{n \in Z} \|V(\theta)(T_0(\theta) + n\omega - z)^{-1}\|_H = 0 \tag{2.19}$$

uniformemente sui compatti rispetto a $\theta \in \mathbb{C}_a^+$. Sia ora F_t la trasformata di Fourier in $L^2(T_\omega)$, $f(t) = \sum_{n \in Z} (F_t f)(n)\, e^{in\omega t}$. Si ha ovviamente:

$$F_t(-i \frac{\partial}{\partial x} \cdot (K(\theta)-z)^{-1})\, F_t^{-1} = \bigoplus_{n=-\infty}^{+\infty} (-i \frac{\partial}{\partial x} \cdot (T(\theta) + \omega n - z)^{-1})$$

e per (2.18), (2.19) si vede immediatamente che $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists\, z(\varepsilon) \in C^+$ in-

dipendente da (n,θ), $n \in Z$, z nei compatti di $\mathbb{C}_a^+$, tale che

$$\|(-i\frac{\partial}{\partial x})(T(\theta)+n\omega-z)^{-1}\|_H = \|(-i\frac{\partial}{\partial x})(T_0(\theta)+n\omega-z)^{-1}[1+V(\theta)(T_0(\theta)+n\omega-z)^{-1}]^{-1}\| < \varepsilon.$$

Pertanto $\exists\, z = z(\varepsilon) \in \mathbb{C}^+$ tale che $\|(-i\frac{\partial}{\partial x})(K(\theta)-z)^{-1}\|_K < \varepsilon$ uniformemente rispetto a $\theta \in \mathbb{C}_a^+$ come sopra, e questo implica (2.17). La (2.14) è ovvia. Inoltre, poiché $W(T_0(\theta)) = \{z \in \mathbb{C}: \arg z = -2\,\mathrm{Im}\theta\}$, sempre per la relativa limitatezza del Lemma 2.2 si ha che $\bar{W} =$
$= \bigcup_{|F|<+\infty,\theta\in\bar{\mathbb{C}}_a^+} W(H(F,\theta,t)) \subset \{z: \mathrm{Im}\, z < M\}$ per un qualche $0 < M < +\infty$.
Pertanto $\bar{W} = \bigcup_{|F|<+\infty,\theta\in\bar{\mathbb{C}}_a^+} W(iK(F,\theta)) \subset \{z: \mathrm{Re}\, z > -M\}$ e ciò conclude la prova di (2). Per far vedere (3), osserviamo che $\|(K(F,\theta)-z)^{-1}\| \leqq \mathrm{dist}\,(z,\bar{W})^{-1}$ è limitata uniformemente rispetto a $\theta \in \bar{\mathbb{C}}_a^+$. Poiché la funzione $u \to K(F,\theta)u$ a valori in K è continua per $\mathrm{Im}\theta \downarrow 0$ $\forall u \in \mathcal{D}$ che è un core di $K(F,\theta)|_{\theta\in R}$, l'affermazione segue da Kato [5 , Teor. VIII.1.5].Infine la (4) segue da ragionamenti standard di analiticità per dilatazione: infatti per (2) se $\lambda \in \sigma_d(K(F,\theta))$, λ è localmente analitico in θ; per (2.14) dipende solo da $\mathrm{Im}\theta$, ed è quindi costante. Inoltre se ϕ, ψ sono vettori analitici per dilatazione in K, cioè se le funzioni $\phi(\theta) = \hat{S}(\theta)\phi$, $\psi(\theta) = \hat{S}(\theta)\psi$ da $\mathbb{C}_a$ in K sono olomorfe, si ha (per maggiori dettagli si veda Reed-Simon, XIII.10) con $K(F) = K(F,0)$

$$(2.20) \qquad \langle\phi, (K(F)-z)^{-1}\psi\rangle = \langle\phi(\bar{\theta}), (K(F,\theta)-z)^{-1}\psi(\theta)\rangle$$

Per $F \in R$, $K(F) = K(F)^*$ da cui la (4).

Come conseguenza immediata si ha:

2.5. Corollario. Sia $\theta \in \bar{\mathbb{C}}_a^\pm$, $F \in R$. Allora la famiglia di operatori in K definita dalla (2.11) è il semigruppo di classe C_0 gene-

rato da $\pm\, i\, K(F,\theta)$:

(2.21) $\quad \mathcal{U}(\pm\sigma,F,\theta) = \exp(\mp\, i\, \sigma K(F,\theta)), \quad \|\mathcal{U}(\pm\sigma,\cdot)\| \leq e^{M|\sigma|}$

<u>Dimostrazione</u>. $\pm\, iK(F,\theta)$ genera un semigruppo C_0 per 2.4 (1), (2). D'altra parte, $\mathcal{D}$ è lasciato invariante da $\mathcal{U}(\pm\sigma,F,\theta)$ per 2.2 (2), e $i \frac{d}{d\sigma} \mathcal{U}(\pm\sigma,F,\theta)u\big|_{\sigma=0} = \dot{K}(F,\theta)u \quad \forall\, u \in \mathcal{D}$. Dunque $K(F,\theta)$ è il generatore.

L'ultimo risultato preliminare è la caratterizzazione dello spettro di $K(\theta)$, $\theta \in \mathbb{C}_a^+$. Denoteremo con $K_0(\theta)$ l'operatore $-e^{-2\theta}\Delta - i\frac{\partial}{\partial t}$ definito su $D(K(\theta))$.

<u>2.6. Lemma</u>. Sia $\theta \in \mathbb{C}_a^+$. Allora

(2.21) $$\sigma(K(\theta)) = \bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} (\sigma(T(\theta)) + n\,\omega)$$

(2.22) $$\sigma_{ess}(K(\theta)) = \sigma_{ess}(K_0(\theta)) = \bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} (e^{-2\theta} R_+ + n\,\omega)$$

(2.23) $$\sigma_d(K(\theta)) = \bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} (\sigma_d(T(\theta)) + n\omega)$$

<u>Dimostrazione</u>. Nelle nostre ipotesi, $\sigma_{ess}(T(\theta)) = \sigma_{ess}(T_0(\theta))$, e ovviamente $\sigma_{ess}(T_0(\theta)) = e^{-2\theta} R_+$. Pertanto basta mostrare la (2.21). Si ha $F_t\, K(\theta)\, F_t^{-1} = \bigoplus_{n=-\infty}^{+\infty} (T(\theta) + n\omega)$, e, d'altra parte $\forall\, b > 0\ \exists\, a > 0$ indipendente da θ nei compatti di $\mathbb{C}_a^+$ tale che:

$$\|V(\theta)(T_0(\theta)-z)^{-1}\| \leq b \sup_{p \in R} |e^{-2\theta} p^2 (e^{-2\theta} p^2 - z)^{-1}| + a \sup_{p \in R} |(e^{-2\theta} p^2 - z)^{-1}| < \varepsilon$$

per $|\mathrm{Re}\, z| > M(\varepsilon)$, $|\mathrm{Im}\, z| < \mu$, $\mu > 0$, e poiché per $z \notin \sigma(T(\theta))$ si ha $(T(\theta)-z)^{-1} = (T_0(\theta)-z)^{-1}(1+V(\theta)(T_0(\theta)-z)^{-1})^{-1}$, la (2.21) è vera.

Assumiamo d'ora in poi $\theta \in \mathbb{C}_a^+$ (fisicamente, questo equivale a prendere $\mathbb{C}^+$ come sheet fisico sul piano z complesso). Ricordiamo inoltre che $\sigma_d(T(\theta))$ è indipendente da θ, e, se λ è autovalore di $T(\theta)$, allora $\mathrm{Im}\,\lambda \leq 0$ e $\lambda + n\omega$ è autovalore isolato di $K(\theta)$.

Possiamo pertanto enunciare il risultato che caratterizza l'operatore di Floquet e alcune delle sue proprietà spettrali per la equazione di Schrödinger in esame.

<u>2.7. Proposizione</u>. Sia $\lambda \in \sigma_d(T(\theta))$, con molteplicità algebrica $m_o(\lambda)$. Allora $\exists\ \bar{F}(\lambda) > 0$ tale che, per $|F| < \bar{F}(\lambda)$:

(1) Siano $\lambda + n_j\,\omega$, $n_j \in Z$, $j = 1,..\ l$, gli autovalori di $T(\theta)$ di molteplicità algebrica $m_j(\lambda)$ che differiscono da λ di multipli interi di ω, e sia $N(\lambda) = \sum m_j(\lambda)$. Allora $\exists\ N(\lambda)$ autovalori $\lambda_1(F) \ldots \lambda_N(F)$ di $K(F,\theta)$ (contati secondo la loro molteplicità) tali che $\lambda_i(F) \to \lambda$ per $|F| \to 0$, $i = 1, \ldots N$. Se $N(\lambda) = 1$ (vera per q.o. ω se $m_o(\lambda) = 1$) l'unico a.v. $\lambda_{o,n}(F) = \lambda + n\omega$ è olomorfo a $F = 0$ e ammette pertanto sviluppo in serie delle perturbazioni di Rayleigh-Schrödinger avente raggio di convergenza > 0.

(2) Ogni a.v. $\lambda(F)$ di $K(F,\theta)$ è una risonanza di $K(F)$ nel senso standard della dilatazione analitica (Reed -Simon, XIII.10).

(3) Ogni a.v. $\lambda(F)$ genera una soluzione quasi-periodica dell'equazione di Schrödinger $H(F,\theta,t) = i\,\frac{\partial\psi}{\partial t}$ nel senso seguente: sia $F \in R$, e $K(F,\theta)f = \lambda(F)f$, $f \in D(K(F,\theta))$. Allora $f = f(\cdot,t) \in C(T_\omega,\mathcal{H})$ e $e^{-i\lambda t}f = \psi$ risolve l'equazione $H(F,\theta,t)\psi = i\,\frac{\partial t}{\partial t}$:

$$f(\cdot,t) = e^{+i\lambda(F)(t-s)}\,U(t,s;F,\theta)f(\cdot,s).$$

In particolare $U(s+2\pi/\omega,s;F,\theta)f(\cdot,s) = e^{-(2\pi/\omega)i\lambda(F)}f(\cdot,s)$.
Viceversa se $U(s+2\pi/\omega,\ s,F,\theta)\phi(\cdot,s) = e^{-(2\pi/\omega)i\lambda(F)}\phi(\cdot,s)$, allora

$$f(t) = e^{i\lambda(F)(t-s)} U(t,s:F,\theta)\phi(\cdot,s) \quad D(K(F,\theta)) \text{ e } K(F,\theta)f = \lambda(F)f.$$

Dimostrazione. La asserzione (1) è conseguenza immediata della Proposizione 2.4 e della teoria analitica delle perturbazioni (Kato, Cap. VII), poiché λ è a.v. isolato di $K(\theta)$ per 2.6. Facciamo vedere (2). Se $K(F,\theta)f = \lambda(F)f$, per 2.5 si ha $\exp(-i\sigma K(F,\theta))f(t) = U(t,t-\sigma;F,\theta)f(t-s) = e^{i\lambda(F)\sigma} f(t)$ $\forall\ \sigma > 0$, cioè $U(t+\sigma,t,F,\theta)f(t) = e^{-i\lambda(F)}f(t+\sigma)$ $\forall \sigma > 0$, quasi ovunque in t. Pertanto per Fubini e la continuità forte di $U(\cdot)$ $f(t)$ è continua e si ha l'affermazione in un senso. Per provare il viceversa è sufficiente notare che $\forall \sigma \geqq 0$, $t \in T_\omega$: $\exp(-i\sigma K(F,\theta))f(t) = e^{i\lambda(t-\sigma-s)}U(t\cdot t-\sigma,F,\theta)U(t-s,s,F,\theta)\phi = e^{-i\lambda(F)\sigma}f(t)$.

Rendiamo ora più precise le informazioni sugli autovalori $\lambda(F)$ mediante la teoria delle perturbazioni.

Per semplicità, se λ è un autovalore isolato di $T(\theta)$ (d'ora in poi, $\theta \in \mathbb{C}_a^+$ sempre), e $\{\lambda+n\omega: \omega \in Z\}$ la corrispondente successione di autovalori isolati di $K(\theta) = T(\theta) - i \frac{\partial}{\partial t}$ in K, consideriamo solo i seguenti due casi, che hanno luogo per quasi ogni ω in 2.5:

Caso A. $\lambda < 0$, $m_0(\lambda) = 1$, $1=0$, $n = 0$

Caso B. $\lambda < 0$, $m_0(\lambda) = 1$, $1 = 1$ con $n_1 = \pm 1$, $m_1(\lambda) = 1$,

La restrizione a $n = 0$ non riduce la generalità. Il caso generale lo si esamina come in [5, II.2, 2.3]. Ricordiamo che lo sviluppo perturbativo è generato dalla teoria standard di Rayleigh-Schrödinger in K: l'operatore non perturbato è $K(\theta)$, e la perturbazione è:

$$(2.24) \qquad e^{-\theta}W(t)(-i\frac{d}{dx}) + \frac{1}{2}W(t)^2 \equiv F\,T_1 + F^2\,T_2$$

$$(2.25)\qquad T_1 = (2i\omega)^{-1}\,(e_1(t)-e_{-1}(t))\otimes Q_1(\theta), T_2=(2i\omega)^{-2}(e_1(t)-e_{-1}(t))^2\otimes Q_2(\theta)$$

$$(2.26)\qquad e_k(t) = e^{ikt},\ k\in Z,\ Q_1(\theta)=-e^{-\theta}\, i\,\frac{d}{dx},\ Q_2 = \frac{1}{2}\, I_H$$

La teoria delle perturbazioni è degenere nel caso B perché la molteplicità di λ come autovalore di $K(\theta)$ è 2. Nel caso A indichiamo con $\phi(\theta)\in H^2$, $\phi(0) = \phi$, l'autovettore di $T(\theta)$ corrispondente a λ; nel caso B, denoteremo con $\phi_1(\theta)$, $\phi_1(0) = \phi_1$; $\phi_2(\theta)$, $\phi_2(0) = \phi_2$, gli autovettori corrispondenti a λ, $\lambda \pm \omega$. Pertanto gli autovettori non perturbati di $K(\theta)$ saranno $\Phi_1 = \phi(\ )\otimes e_0$ nel caso A, $\Phi_{1,2} = \phi_{1,2}(\theta)\otimes e_{\pm 1}$ nel caso B. Denotiamo infine con $\{E(\mu): \mu \geq \inf \sigma(T)\}$ la misura spettrale di T e poniamo $R(n\omega,\lambda,\theta) = (T(\theta) - n\omega-\lambda)^{-1}$, $n = \pm 1, \pm 2, ..$ Si ha allora (per la dimostrazione, si veda (2)).

2.8. Proposizione. Supponiamo che valga il caso A, e sia $\sum_{i=0}^{\infty} C_i(\omega)\, F^i$, $C_0(\omega) = \lambda$, la serie delle perturbazioni per $\lambda(F)$. Allora:

(1) $C_i(\omega)$ non dipende da θ e $C_{2i+1}(\omega) = 0$, $i = 0,1,...$

(2) Sia $\lambda + n\omega < 0$. Allora $\mathrm{Im}\, C_{2i}(\omega) = 0$, $0 \leq i < n$.

(3) Sia $n(\lambda)$ il minimo intero per cui $\lambda + n\omega > 0$. Allora

$$(2.27)\qquad \mathrm{Im}\, C_{2n}(\lambda,\omega) = -\pi < \frac{dE(\mu+n\omega)}{d\mu}\Big|_{\mu=\lambda}\ \phi(n,\omega,\lambda,0),\phi(n,\omega,\lambda,0)>_H$$

e pertanto $\mathrm{Im}\, C_{2n}(\lambda,\omega) < 0 \Rightarrow \mathrm{Im}\,\lambda(F) < 0$ q.d. in ω a meno che non sia identicamente nulla. Qui:

$$\phi(n,\lambda,\omega,\theta)= \sum_{\nu=1}^{n}(-1)^p \sum_{v_1,...v_p=n} Q_{v_1}(\theta)R(n\omega-v_1\omega,\lambda,\theta)Q_{v_2}(\theta)\ ...$$

$$...\ Q_{v_{p-1}}(\theta)R(v_p\omega,\lambda,\theta)Q_{v_p}(\theta)\phi(\theta)\qquad v_j = 1,2,\qquad j = 1,...p.$$

Osservazioni. (1) La formula (2.27) è la regola aurea di Fermi al primo ordine non nullo in teoria delle perturbazioni. (2) Sempre per la teoria analitica delle perturbazioni, si ha immediatamente la rappresentazione che segue per gli autovettori di risonanza di $K(F,\theta)$.

$$\Phi(\theta)= \phi(\theta)-F(2i\omega)^{-1}[e_{-1}(t)\otimes(T(\theta)-\lambda+\omega)^{-1}e^{-\theta}-i\frac{d\phi(\theta)}{dx} - e_1(t)\otimes \otimes(T(\theta)-\lambda+\omega)^{-1}e^{-\theta}i\phi'(\theta)] + O(F^2) \tag{2.28}$$

nel caso A;

$$\phi_j(\theta) = \frac{1}{2}[e_o \quad \phi_1(\theta) + (-1)^{j-1}\, e_{\pm 1}(t)\otimes\phi_2(\theta)] + O(F), \quad j = 1,2, \tag{2.29}$$

nel caso B.

3. OSCILLAZIONI FORZATE

Per ragioni tecniche che appariranno chiare fra poco, supporremo d'ora in poi che V soddisfi anche la condizione seguente:

A.2.. Supponiamo che V soddisfi A.1. Per $\theta \in \mathbb{C}^+_a$, sia $V(\theta) = V(e^{\theta}x)$, $A(\theta) = |V(\theta)|^{1/2}$, $B(\theta) = V(\theta)|V(\theta)|^{-1/2}$, $\hat{A}(\theta) = \mathcal{F}(A(\theta))$, $\mathcal{F}(B(\theta)) = \hat{B}(\theta)$, $\mathcal{F}$ la trasformata di Fourier in $L^2(R^3)$. Allora $\exists\, \varepsilon > 0$ tale che:

$$(A(\theta),B(\theta))\in L^p(R^3),\ \frac{3}{2}-\varepsilon\leq p\leq 6+\varepsilon,\ (\hat{A}(\theta),\hat{B}(\theta))\in L^q(R^3),\ \frac{3}{2}-\varepsilon\leq p\leq\frac{3}{2}+\varepsilon. \tag{3.1}$$

Un esempio di potenziale che soddisfa A.2 è $x \to V(x) = e^{-\beta|x|}|x|^{-\alpha}$, $\beta > 0$, $\alpha < 1$.

Si ha allora:

<u>3.1. Proposizione</u>. Supponiamo che V soddisfi A.2, sia $F \in R$, $U(t,s;F) = U(t,s,F;\theta = 0)$ sia il propagatore dell'equazione di Schrödinger (1.1). Allora:

(1) Nel caso A della Prop. 2.8

(3.2) $\langle U(t,s,F)\phi,\phi\rangle = e^{-i\lambda(F)(t-s)} + 0(F)$, $F \to 0$ uniformemente in $\pm t > \pm s$

(2) Nel caso B della Prop. 2.8

(3.3) $\langle U(t,s;F)\phi_1,\phi_1\rangle = \frac{1}{2}[e^{-i\lambda_1(F)(t-s)} + e^{-i\lambda_2(F)(t-s)}] + 0(F)$, $F \to 0$

(3.4) $\langle U(t,s;F)\phi_1,\phi_2\rangle = \frac{1}{2}[e^{-i\lambda_1(F)(t-s)} - e^{-i\lambda_2(F)(t-s)}]e^{-i\omega t} + 0(F)$ $F \to 0$

uniformemente in $\pm t > \pm s$.

Daremo in seguito un cenno alla dimostrazione che è basata sul ragionamento di interpolazione di Kato che ora ricorderemo. Limitiamoci per il momento ad osservare che la (3.4) esprime il fenomeno di oscillazione forzata risonante.

<u>3.2. Lemma</u> (Kato). Siano $f, g \in L^P(R^3)$. Allora $(t > 0)$

(1) (3.5) $\|f e^{-it\Delta} g\,\phi\|_2 \leq \|f\|_p \|g\|_p t^{-3/P} \|\phi\|_2$

cioè l'operatore $f e^{-it\Delta} g$, $t > 0$, dove f e g sono interpretati come operatori massimi di moltiplicazione, è continuo da L^2 a L^2 con norma maggiorata da $\|f\|_p \|g\|_p t^{-3/p}$.

(2) Siano $f, g \in L^p$, $3-\varepsilon < p < 3+\varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Allora l'operatore $f(-\Delta - z)^{-1} g$ è continuo da L^2 a L^2 $\forall z \notin R_+ \cup \{0\}$, è olomorfo in $z \in \mathbb{C} \setminus R_+ \cup \{0\}$, e ha valori al contorno continui per $\operatorname{Im} z \downarrow\uparrow 0$.

<u>Dimostrazione</u>. E' noto che $e^{-it\Delta}$ è continuo da L^2 a L^2 con norma 1, e dalla sua rappresentazione esplicita segue immediatamente che è continuo da L^1 a L^∞ con norma $|t|^{-3/2}$. Pertanto, per il teorema d'interpolazione di Riesz-Thorin, $e^{-it\Delta}$ è continuo da L^s a $L^{s'}$, $s^{-1} + s'^{-1} = 1$, con norma $|t|^{3/2-3/s}$.

Sia ora $\phi \in L^2$. Dato che $g \in L^p$, per Hölder $g\phi \in L^s$, $s^{-1} = 2^{-1} + p^{-1}$, e $\|g\phi\|_s \leq \|g\|_p \|\phi\|_2$. Pertanto $e^{-it\Delta} g\phi \in L^{s'}$ con $s'^{-1} = 1 - s^{-1} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{p} = \frac{1}{2} - \frac{1}{p}$, e $\|e^{-it\Delta} g\phi\|_{s'} \leq |t|^{3/2-3/s} \|g\phi\|_{L^s} =$
$= |t|^{3/2-3/p-3/2} \|g\|_p \|\phi\|_2 = |t|^{-3/p} \|g\|_p \|\phi\|_s$. Moltiplichiamo ora per $f \in L^p$ e notiamo che $\frac{1}{p} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Pertanto, ancora per Hölder:
$\|f e^{-it\Delta} g\phi\|_2 \leq \|f\|_p \|e^{-it\Delta} g\phi\|_s \leq \|f\|_p \|g\|_p (t)^{-3/p} \|\phi\|$, il che prova (1). Per provare (2), si noti che, se $\operatorname{Im} z \gtrless 0$, vale la seguente rappresentazione, nel senso degli integrali forti di Riemann:

$$(-\Delta - z)^{-1} = \mp i \int_0^\infty e^{\pm itz} e^{\mp it\Delta} \, dt$$

Pertanto: ($\operatorname{Im} z > 0$)

$$(3.6) \quad \|f(-\Delta - z)^{-1} g\| \leq \int_0^\infty e^{-\operatorname{Im} z t} \|f e^{-it\Delta} g\| \, dt \leq \|f\|_p \|g\|_p \int_0^\infty e^{-t \operatorname{Im} z} |t|^{-3/p} dt$$

per (1). Questa limitazione è uniforme su $\operatorname{Im} z > 0$ se $(f,g) \in L^p$, $3-\varepsilon<p<3+\varepsilon$, e pertanto la (2) è vera per cose note.

<u>3.3. Corollario</u>. Il risolvente $R(z,T) = (T - z)^{-1} = (-\Delta + V - z)^{-1}$, olomorfo da $\mathbb{C} \setminus R_+ \cup \{0\}$ a L^2, ha valori al contorno continui per $\operatorname{Im} z \downarrow\uparrow 0$.

<u>Dimostrazione</u> (cenno). Poiché sotto le nostre ipotesi lo sviluppo di Neumann è convergente, possiamo scrivere, per $|\operatorname{Im} z| > M$, M suff. grande:

$$R(z,T) = (-\Delta - z)^{-1} + (-\Delta - z)V^{1/2}\, |V|^{1/2}\, (-\Delta - z)^{-1} + \dots \tag{3.7}$$

$$= (-\Delta - z)^{-1} + [(-\Delta - z)^{-1} V^{1/2}]\, [1 + V^{1/2}(-\Delta - z)^{-1} |V|^{1/2}]^{-1}\, V^{1/2}(-\Delta - z)^{-1}.$$

Per quanto visto sopra $[1 + V^{1/2}(-\Delta - 2)^{-1} |V|^{1/2}]$ è olomorfo da $\mathbb{C} \notin R_+ \cup \{0\}$ a $B(L^2)$ e ha valori al contorno continui $\forall z \in R_+ \cup \{0\}$ perché $-\Delta + V$ non ha autovalori ivi; con un ulteriore passaggio tecnico che qui non esponiamo si possono controllare anche i fattori laterali, e quindi si può prendere il limite per $\operatorname{Im} z \downarrow\uparrow 0$ in $B(L^2)$.

Osserviamo ora che, denotando con $\{e^{-itT} : t \geq 0\}$ il semigruppo di classe C_0 generato da iT, per la formula d'inversione della trasformata di Laplace si ha, se $u, v \in L^2$:

$$\langle e^{-itT} u, v \rangle = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it(\lambda + in)} \langle R(\lambda + in, T)u, v\rangle\, d\lambda \tag{3.8}$$

da cui si potranno ottenere limitazioni uniformi in t per il 1° membro se si riesce a controllare

$$\lim_{n \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \| R(\lambda + in, T) \|\, d\lambda$$

Inserendo la rappresentazione (3.7) in (3.8), poiché

$\sup_{n \geq 0} \| [1 + V^{1/2}(-\Delta-\lambda+in)^{-1}V^{1/2}]^{-1} \|$ risulta limitato, si imporrà il controllo anche di $\sup_{n \geq 0} \int \| V^{1/2}(-\Delta-\lambda-in)^{-1} \| \, d\lambda$, e dell'altro fattore laterale.

La dimostrazione della Proposizione 3.1 procede proprio secondo questo schema, applicandolo stavolta all'operatore $K(F,\theta) = K_0(F,\theta) + V(\theta)$ in K, $K_0(F,\theta) = (-ie^{-\theta} \vec{\nabla} - \vec{e}\, W(t))^2 - i \frac{\partial}{\partial t}$.

Più precisamente, sfruttando la dilatazione analitica si riportano i prodotti scalari $\langle U(t,s,F)\, \phi_1, \phi_1 \rangle$ ecc. ai prodotti scalari $\langle U(t,s;F,\theta)\phi_1(\theta), \psi_1(\bar{\theta})\rangle$.

Poi si nota che, per il formalismo del n. 2, $U(t,s;F,\theta)$ è esprimibile in termini del semigruppo $\mathcal{U}(\sigma;F,\theta) = e^{-i\sigma K(F,\theta)}$.

Per ottenere limitazioni analoghe alla Prop. 3.2, da mettere nelle analoghe alla (3.7) e alla (3.8), si osserva che con un conto facile e ben noto si trova che $\mathcal{F}\, e^{-i\sigma K_0(F,\theta)}\, \mathcal{F}^{-1}$ è semplicemente la moltiplicazione per una funzione nota; esplicitamente: se $f = f(x,t) \in K$, e $(\mathcal{F} f)(\xi,t)$ denota la sua trasformata di Fourier rispetto alle variabili spaziali, si ha: (2)

$$(3.9) \qquad (\mathcal{F}\, e^{-i\sigma K_0(F,\theta)} \mathcal{F}^{-1} \mathcal{F} f)(\xi,t) = G_\theta(\xi,F,t,t-\sigma)(\mathcal{F}f)(\xi,t-\sigma)$$

dove:

$$(3.10) \qquad G_\theta(\xi,F,t,t-\sigma) = e^{i\xi_x F\omega^{-2}(\cos \omega t - \cos \omega (t-\omega)) + i(t-s)e^{-2\theta}|\xi|^2/2} \cdot e^{iF^2(\sin 2\omega(t-\sigma) - \sin 2\omega t)/(\omega^3) + i F^2 \sigma / 4\omega^2}$$

Si verifica poi che l'antitrasformata di Fourier di questo

nucleo permette l'applicazione del ragionamento di interpolazione di Kato, e si ottiene così l'analogo del Lemma 3.2 per $V(\theta)^{1/2}(K_0(F,\theta)-z)^{-2}|V(\theta)|^{1/2}$. Inoltre, con la stessa tecnica che controlla $\sup_{n\geq 0}\int_{-\infty}^{+\infty} \|V^{1/2}(-\Delta-\lambda+in)^{-1}\| \, d\lambda$, si riesce a controllare $\sup_{n\geq 0}\int \|V(\theta)(K_0(F,\theta)-\lambda+in)^{-1}\| d\lambda$ e stabilire l'analogo della (3.7) è banale.

Tenendo conto che $\lambda(F)$ è a.v. di $K(F,\theta)$ diventa poi facile verificare (3.2), (3.3), (3.4).

BIBLIOGRAFIA

[1] K. YAJIMA, "Resonances for AC-Stark effect" Commun. Math. Phys. 87, 331-352 (1982)

[2] S. GRAFFI, V. GRECCHI, H.S. SILVESTONE "Resonances and convergence of Perturbation Theory for N-body Atomic Systems in AC-External Fields" Ann. Inst. H. Poincaré, in stampa.

[3] E. MERZBACHER, Quantum Mechanics, J. Wiley, 1964

[4] H.A. Bethe, Intermediate Quantum Mechanics, W.A. Benjamin 1965

[5] T. KATO, Perturbation Theory for Linear Operators Springer 1966

[6] M. REED e B. SIMON, Methods of Modern Mathematical Physics, Voll. I-IV, Accademic Press 1975-79

[7] T. KATO, "Wave operators and similarity for some non-self-adjoint operators" Math. Ann. 162, 258-276 (1966)